ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «БОГАТОВСКОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ УЧИЛИЩЕ»

РАССМОТРЕНО	УТВЕРЖДАЮ
На заседании методической комиссии общеобразовательных дисциплин	Директор ГБПОУ «Богатовское профессиональное училище»
_______________/Тишкова В.Н.	_______________/ А.В. Чугунов/
«28» 08 2015 г.	«28» 08 2015 г.

Методические рекомендации по выполнению практических работ

по учебной дисциплине

ЕН.01. «Математика»

для специальности
38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

с. Богатое,2015

Методические рекомендации по выполнению практических работ предназначены для организации работы на практических занятиях по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА», которая является важной составной частью в системе подготовки специалистов среднего профессионального образования.

Методические рекомендации имеют практическую направленность и значимость. Формируемые в процессе практических занятий умения могут быть использованы студентами в будущей профессиональной деятельности.

Методические рекомендации предназначены для студентов средних профессиональных учебных заведений, изучающих учебную дисциплину «МАТЕМАТИКА» и могут использоваться на учебных занятиях.

Составитель: Киселева Е.В.,

ГБПОУ «Богатовское профессиональное училище"

Содержание

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических работ обеспечивают реализацию рабочей программы по учебной дисциплине. Реализация программы обеспечит компетентность будущих специалистов в данной области как неотъемлемой части их профессионализма в период вступления в самостоятельную жизнь.

Современные требования к учебному процессу ориентируют учителя на проверку знаний, умений и навыков через деятельность учащихся. Практические работы позволяют формировать, развивать, закреплять умения и навыки, получать новые знания. Практическая деятельность на уроке является неотъемлемой частью учебно-познавательного процесса на любом его этапе – при изучении нового материала, повторении, закреплении, обобщении и проверке знаний. В процессе практических занятий вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Практические работы проводятся согласно календарно-тематическому планированию, в соответствии с требованиями учебной программы по дисциплине.

Преподаватель заранее информирует учащихся о графике выполнения этих работ.

Оценка за практическую работу выставляется каждому студенту, присутствовавшему на уроке, когда проводилась данная работа.

Практические работы могут проводиться как индивидуально, так и для пары или группы студентов.

Правила выполнения практических работ

1. Обучающийся должен выполнить практическую работу в соответствии с полученным заданием.
2. Каждый обучающийся после выполнения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.
3. Отчет о проделанной работе следует выполнять в тетрадях для практических работ.
4. Содержание отчета указано в описании практической работы.
5. Таблицы и рисунки следует выполнять с помощью чертежных инструментов (линейки, циркуля и т. д.) карандашом.
6. Расчет следует проводить с точностью до двух значащих цифр.
7. Если обучающийся не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.

Все работы оформляются в специальных тетрадях для практических занятий.

Критерии оценивания практической работы.

Отметка «5» ставится, если ученик:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если ученик:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если ученик:

- допущено более одной ошибки или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если ученик:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Перечень практических работ

Практическая работа №1: «Решение СЛУ»

Практическая работа № 2: «Определение и исследование функций».

Практическая работа № 3 «Свойства функций. Непрерывные и периодические функции. Свойства и графики синуса, косинуса

Практическая работа №4: «Вычисление производных»

Практическая работа №5: «Использование определенного интеграла при решении задач прикладного характера».

Практическая работа № 6: « Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнение числовых выражений».

Практическая работа №7: «История развития комбинаторики»

Практическая работа №8: «Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона—Лейбница».

Практическая работа №9: «Классическое определение вероятности, свойства вероятностей».

Практическая работа №10: «Теорема о сумме вероятностей. Прикладные задачи. Представление числовых данных».

ЗАДАНИЯ В ВИДЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.
Практическая работа № 1.

«Решение СЛУ»

Цель работы:

1) расширить представление о методах решения СЛУ и отработать алгоритм решения СЛУ методом Крамора;
2) развивать логическое мышление студентов, умение находить рациональное решение задачи;
3) воспитывать у студентов аккуратность и культуру письменной математической речи при оформлении ими своего решения.

Основной теоретический материал.

Метод Крамера . Применение для систем линейных уравнений.

Задана система N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с N неизвестными, коэффициентами при которых являются элементы матрицы $A(a_{ij})$, а свободными членами - числа $b_1, b_2, \dots, b_N.$

Первый индекс i возле коэффициентов a_{ij} указывает в каком уравнении находится коэффициент, а второй j - при котором из неизвестным он находится.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N. \end{cases}$$

Если определитель матрицы A не равен нулю

то система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Решением системы линейных алгебраических уравнений называется такая упорядоченная совокупность N чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, которая при $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_N = \lambda_N$ превращает каждое из уравнений системы в правильную равенство. Если правые части всех уравнений системы равны нулю, то систему уравнений называют однородной. В случае, когда некоторые из них отличны от нуля – неоднородной $b_j \neq 0, (j = 1, 2, \dots, k).$ Если система линейных алгебраических уравнений имеет хоть одно решение, то она называется совместной, в противном случае - несовместимой. Если решение системы единственное, то система линейных уравнений называется определенной. В случае, когда решение совместной системы не единственное, систему уравнений называют неопределенной. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными (или равносильными), если все решения одной системы является решениями второй, и наоборот. Эквивалентны (или равносильны) системы получаем с помощью эквивалентных преобразований.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0$$

Эквивалентные преобразования СЛАУ

1) перестановка местами уравнений;

2) умножение (или деление) уравнений на отличное от нуля число;

3) добавление к некоторого уравнения другого уравнения, умноженного на произвольное, отличное от нуля число.

Решение СЛАУ можно найти разными способами, например , по формулам Крамера (метод Крамера)

Теорема Крамера. Если определитель Δ системы N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными отличен от нуля $\Delta \neq 0$ то эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}$. $\Delta_j \left(j = 1, 2, \ldots, N \right)$- определители, образованные с Δ заменой j-го столбца, столбцом из свободных членов.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет. Если же $\Delta_j = 0, \ \left(j = 1, 2, \ldots, N \right)$, то СЛАУ имеет множество решений.

Задача 1.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot (-3) - \left[(-1) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-3) \right] = \\ = 4 + 8 - 12 + 4 + 16 + 6 = 26.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то заданная система уравнений совместная и имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot (-3) - \left[(-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-3) \right] = \\ = 6 + 10 + 12 + 5 - 16 + 9 = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot 5 - \left[(-1) \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 \right] = \\ = 16 + 12 + 20 + 16 + 24 - 10 = 78;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot (-3) - \left[3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) \right] = \\ = 10 + 32 + 36 - 12 + 40 + 24 = 130.$$

По формулам Крамера находим

неизвестные $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{130}{26} = 5.$

Итак $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$ единственное решение системы.

Задача 2.

Дана система четырех линейных алгебраических уравнений. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных. Для этого разложим его по первой строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \\ +1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Найдем составляющие определителя:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-8) \cdot 5 \cdot 3 - \left[(-8) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 3\right] = -65;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 3 - \left[(-8) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3\right] = -69;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 2 - \left[(-8) \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 2\right] = 58;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - \left[2 \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 2\right] = 52.$$

Подставим найденные значения в определитель $\Delta = -65 + 69 + 58 - 52 = 10.$

Детерминант $\Delta = 10 \neq 0$, следовательно система уравнений совместная и имеет единственное решение. Вычислим определители по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим каждый из определителей по столбцу в котором есть больше нулей.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 3 \cdot (-25) = 70;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 + 3 \cdot (-29) = -80;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 \cdot (18) = -50;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 3 \cdot 22 = 60.$$

По формулам Крамера находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{70}{10} = 7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{80}{10} = -8, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{50}{10} = -5, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{10} = 6.$$

Решение системы $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5.$

Задания для самостоятельного решения:

ВАРИАНТ 1 Решите систему уравнений по формулам Крамера

1) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 1; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$

3)) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x - 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -3, \\ x + 5y - z = -1; \\ 3x + y + 4z = 11. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - y - z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y - z = 1. \end{cases}$

Практическая работа № 2.

«Определение и исследование функций».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

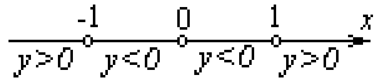
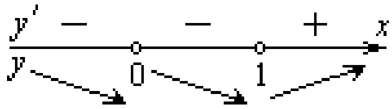
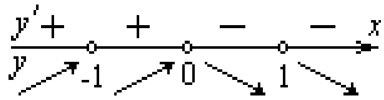
1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Определение и исследование функций».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

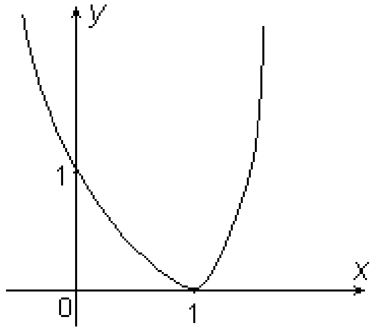
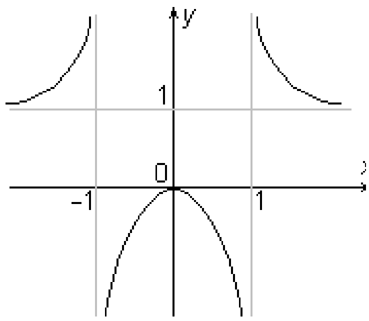
ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

Теоретическая часть.

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$; б) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$	б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
1	Находим область определения функции	$D(f)=R$	$x^2-1=0$, $x=\pm 1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq\pm f(x)$ $\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная	$f(-x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)\ \Rightarrow$ функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4-4x^3+1=0,\ (3x^4-3x^3)-$ $-(x^3-1)=0$, $(x-1)^2(3x^2+2x+1)=0$, $x-1=0$, $x=1$ - нуль функции	$\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$, $x=0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x)=(3x^4-4x^3+1)'=12x^3-$ $-12x^2=12x^2(x-1)$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0;1$ - критические точки функции	$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'=$ $=\dfrac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ - критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1)<0, y'(0{,}5)<0, y'(2)>0$ x=0 – не является точкой экстремума, x=1 – точка минимума, $y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0, y'(-0{,}5)>0,$ $y'(0{,}5)<0, y'(2)<0$, x=0 – точка максимума, $y_{max}=y(0)=0$
6	Находим предел функции при $x\to\pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}(3x^4-4x^3+1)=\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$

7	Строим эскиз графика функции		

Примеры. Исследуйте и постройте графики функций:

1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = 2x^2 - x^4 - 1$; 3) $y = 6x - x^2 - 5$; 4) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$; 5) $y = 3x - x^3$; 6) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 7) $y = x^3 - 3x + 1$; 8) $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$; 9) $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

Практическая часть.

<u>Вариант 1.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

<u>Вариант 2.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2$ и постройте ее график.

<u>Вариант 3.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

<u>Вариант 4.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = 12x - x^3$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

Вариант 5.

1. Исследуйте функцию $f(x)=3x^4-6x^2+4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^3+3x+2$ и постройте ее график.

Вариант 6.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-3x$ и постройте ее график.

Вариант 7.

1. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^4+5x^2+4$ и постройте ее график.

Вариант 8.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-x^2$ и постройте ее график.

Практическая работа № 3.

«Свойства функций. Непрерывные и периодические функции. Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Свойства функций. Непрерывные и периодические функции. Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты; микрокалькуляторы, таблица Брадиса.

Практическая часть.

Вариант 1.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=x^3$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=x^2-x$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=x+1$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=x^3-4x$ с осью OY и нули функции.

Вариант 2.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=3x^2-5x+1$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{1}{x-3}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=x^2-5$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=1-x^4$ с осью OY и нули функции.

Вариант 3.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=x^3-1$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=x^2-3x+4$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=-x^2$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=x^4-x^2$ с осью OY и нули функции.

Вариант 4.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=3x^2-5x-2$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{2x}{x^2-5x+4}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=x^3+x$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.

4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=1-x^3$ с осью OY и нули функции.

Вариант 5.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{5}{x^2-25}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=5x^2+4x$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=\frac{1}{x}+2$ с осью OY и нули функции.

Вариант 6.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{3}{x-1}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=x^3+3$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=\frac{2}{x+1}$ с осью OY и нули функции.

Вариант 7.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{8}{x^2+49}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=\sqrt{1-x}$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=3-\frac{1}{x}$ с осью OY и нули функции.

Вариант 8.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{5}{x-1}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{x-1}$.

3. Установите, является ли функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.

4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ с осью OY и нули функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

«Вычисление производных»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания уч-ся по теме: «Производная».
2. Организовать деятельность уч-ся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности учащихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по математическому анализу, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить условие заданий для практической работы (тест).
2. Оформить отчет о работе (форму отчета выбирает преподаватель).

Тест 1. Определение производной.

<u>*1 вар*иант.</u>

1. Приращение функции $f(x)=x^2+2$ в точке $x_0=-1$ при $\Delta x=0{,}1$ равно:
   а) –0,19; б) 0,21; в) 0,20; г) –0,09.
2. Производная функции $y=\frac{1}{4}x^4+5$ равна:
   а) $\frac{1}{4}x^3$; б) x^3+5; в) x^6; г) x^3.
3. Производная функции $f(x)=\frac{1}{2}x^3+1$ в точке $x=2$ равна:
   а) 5; б) 4,5; в) 6; г) 3,5.
4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x)=-2x^2+1$?
   а) $-2x$; б) $-4x$; в) $-4x+1$; г) $-4x^3$.

<u>*2 вар*иант.</u>

1. Приращение функции $f(x)=2x^2-3$ в точке $x_0=1$ при $\Delta x=-0{,}1$ равно:
   а) 0,42; б) –0,38; в) 0,40; г) –0,39.
2. Производная функции $y=\frac{1}{7}x^7-3$ равна:
   а) x^6; б) x^7; в) $\frac{1}{7}x^6$; г) x^6-3.
3. Производная функции $f(x)=\frac{1}{3}x^4-3$ в точке $x=-2$ равна:

а) $10\frac{2}{3}$; б) $2\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{1}{3}$; г) $-10\frac{2}{3}$.

4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x)=3x^3-5$?

а) x^2; б) $9x^2-5$; в) $9x^2$; г) $9x^4$.

*3 вар*иант.

1. Приращение функции $f(x)=-x^2+1$ в точке $x_0=1$ при $\Delta x=-0{,}1$ равно:

а) –0,19; б) 0,21; в) 0,19; г) –0,21.

2. Производная функции $y=\frac{1}{6}x^6-4$ равна:

а) x^7; б) x^5; в) x^7-4; г) x^5-4.

3. Производная функции $f(x)=\frac{1}{4}x^6-1$ в точке $x=-1$ равна:

а) –1,5; б) 1,5; в) –0,75; г) 0,75.

4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x)=-4x^4-3$?

а) $-x^3$; б) $-16x^2-3$; в) $-16x^5$; г) $-16x^3$.

*4 вар*иант.

1. Приращение функции $f(x)=3x^2-1$ в точке $x_0=-1$ при $\Delta x=0{,}1$ равно:

а) 0,63; б) 0,60; в) –0,59; г) –0,57.

2. Производная функции $y=\frac{1}{5}x^5+2$ равна:

а) x^6+2; б) x^4+2; в) x^4; г) x^6.

3. Производная функции $f(x)=\frac{1}{5}x^{10}+1$ в точке $x=1$ равна:

а) 1,2; б) 2; в) –1,2; г) 2,5.

4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x)=-5x^5+2$?

а) $-25x^4$; б) x^4; в) $-25x^4+2$; г) $-25x^6$.

Тест 2. Правила нахождения производной. Степенная и тригонометрические функции.

*1 вар*иант.

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{5}x^5-4x^3+8$ равна:

а) $\frac{1}{5}x^4-4x^2$; б) x^4-12x^2; в) x^5-4x^3; г) x^6-12x^4+8x.

2. Производная функции $y=x\cos x+x^2\sin x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ в точке $x_0=-1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sqrt{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}x^2$ в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 1; г) 0.

*2 вар*иант.

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2+5$ равна:

а) $\frac{1}{4}x^3-3x$; б) x^4-3x^2; в) x^3-6x; г) x^5-6x^3+5x.

2. Производная функции $y=x^2\cos x+x\sin x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ в точке $x_0=1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sqrt{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}-\frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 1; г) 0.

3 вариант.

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{7}x^7+2x^4-7$ равна:

а) $\frac{1}{7}x^6+5x^3$; б) x^7+20x^5; в) x^7+5x^4; г) x^6+8x^3.

2. Производная функции $y=x^2\sin x-x\cos x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{1-x}{x^2+1}$ в точке $x_0=1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 1; г) 0.

4 вариант.

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{6}x^6-5x^4-6$ равна:

а) x^5-20x^3; б) $\frac{1}{6}x^5-5x^3$; в) x^6-5x^3; г) x^7-20x^5-6x.

2. Производная функции $y=x\sin x-x^2\cos x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{1+x}{x^2-1}$ в точке $x_0=0$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sqrt{2}\sin x-\frac{2}{\pi}x^2-\cos\frac{\pi}{6}$ в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 0; г) 1.

Тест 3. Правила нахождения производной. Логарифмическая и показательная функции.

1 вариант.

1. Производная функции $y = sin\,2x \cdot e^{2x-1}$ равна нулю в точках:

а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k \in Z)$.

2. Производная функции $f(x) = x - e^{x}$ в точке $x = ln\,2{,}5$ равна:

а) $ln\,2{,}5 - 1$; б) 3,5; в) –1,5; г) 1.

3. Производная функции $f(x) = 3^{x} - x\,ln\,x\,ln\,3$ в точке $x_0 = 1$ равна:

а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-3\,ln\,2$; г) $-2\,ln\,3$.

4. Производная функции $f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

*2 вар*иант.

1. Производная функции $y = -cos\,3x \cdot e^{3x+1}$ равна нулю в точках:

а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k \in Z)$.

2. Производная функции $f(x) = e^{-x} + x$ в точке $x = ln\,3$ равна:

а) $ln\,3 - 1$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 1,5; г) $\frac{2}{3}$.

3. Производная функции $f(x) = 2^{x} + x\,ln\,x\,ln\,2$ в точке $x_0 = 1$ равна:

а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-3\,ln\,2$; г) $-2\,ln\,3$.

4. Производная функции $f(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}}$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

*3 вар*иант.

1. Производная функции $y = cos\,2x \cdot e^{2x+1}$ равна нулю в точках:

а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k \in Z)$.

2. Производная функции $f(x) = e^{-x} - x$ в точке $x = ln\,4$ равна:

а) –1,25; б) $-ln\,4 - 1$; в) –0,75; г) 1,5.

3. Производная функции $f(x) = -2^{x} - x\,ln\,x\,ln\,2$ в точке $x_0 = 1$ равна:

а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-ln\,2$; г) $-3\,ln\,2$.

4. Производная функции $f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

*4 вар*иант.

1. Производная функции $y = sin\,3x \cdot e^{3x-2}$ равна нулю в точках:

а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k \in Z)$.

2. Производная функции $f(x) = x + e^x$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $ln\,2 + 1$; б) 3; в) 1; г) 1,5.

3. Производная функции $f(x) = -3^x + x\,ln\,x\,ln\,3$ в точке $x_0 = 1$ равна:

а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-3\,ln\,2$; г) $-2\,ln\,3$.

4. Производная функции $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} - e^x}$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $1\dfrac{7}{9}$; б) $-1\dfrac{7}{9}$; в) $-\dfrac{16}{25}$; г) $\dfrac{16}{25}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

«Использование определенного интеграла при решении задач прикладного характера».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Использование определенного интеграла при решении задач прикладного характера».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int\limits_{-2}^{2}\left(-4x + 4 + x^2\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x + 4 + x^2$:

$$F(x) = -4\cdot\frac{x^2}{2} + 4\cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int\limits_{-2}^{2}\left(-4x + 4 + x^2\right)dx = \left(-2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(-2\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) + \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(-8 + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной a верно равенство

$$\int\limits_{-2a}^{a} 2x^3\,dx = -7{,}5\,?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\dfrac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^{a} 2x^3 dx = \left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7{,}5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число –1.

О т в е т: -1.

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Значение $\int_{-1}^{1}\left(-6x + x^2 + 9\right)dx$ равно:

   а) $18\frac{1}{3}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $19\frac{1}{3}$.

2. Равенство $\int_{a}^{2a} x^3 dx = 3{,}75$ (где $a > 0$) верно, если a равно:

   а) 1; б) 2; в) 3.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}(1 + \cos 2x)dx$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{1}(2x+1)dx = \int_{0}^{2}\left(x^3 - 1\right)dx$.

Вариант 2.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x dx$; б) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$.

Вариант 3.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x+1)^2}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 4.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{0}^{1} dx$.

Вариант 5.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} -x^3 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$

2. Верно ли неравенство: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int_{0}^{2} (1+3x)^4 dx$.

3. Верно ли неравенство: $\int_{-1}^{1} x^4 dx < \int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$; б) $\int_{2}^{7} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

2. Верно ли неравенство: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{1}^{5} x^4 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

2. Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

«Арифметические действия над комплексными числами».

Цель работы:

1) 1)научиться находить целую и мнимую части, модуль комплексного числа, выполнять арифметические операции с комплексными числами (сложение и вычитание, умножение и деление), а также возведение мнимой единицы в степень, решать квадратные уравнения в комплексных числах.

Теоретическая часть.

Число вида $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая мнимая единица. Число a называется действительной частью (Re z) комплексного числа z, число b называется мнимой частью (Im z) комплексного числа z.

Число $\bar{z}=a-bi$ называется сопряженным комплексному числу z.

Множество комплексных чисел принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой $\mathbb{C}$.

Комплексная плоскость состоит из двух осей:

$\operatorname{Re} z$ – действительная ось

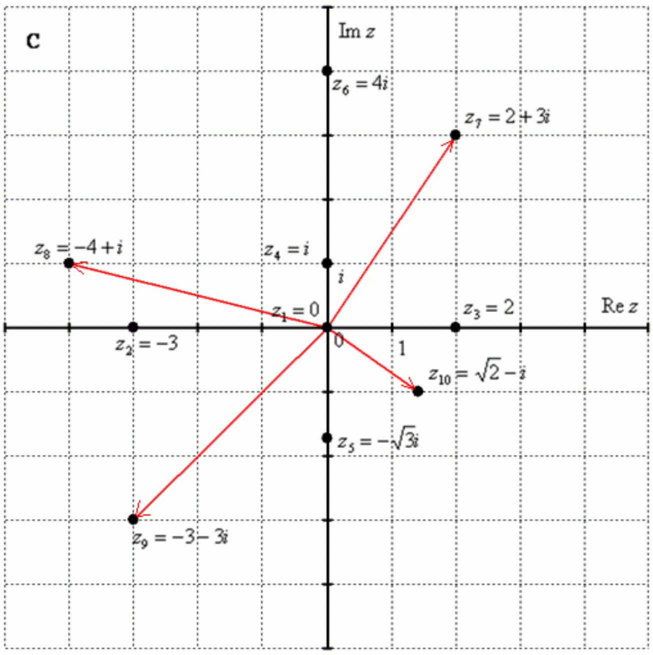
$\operatorname{Im} z$ – мнимая ось

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1=0$, $z_2=-3$, $z_3=2$

$z_4=i$, $z_5=-\sqrt{3}i$, $z_6=4i$

$z_7=2+3i$, $z_8=-4+i$, $z_9=-3-3i$, $z_{10}=\sqrt{2}-i$



Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, модуль – это длина радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом. Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$. По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$

Действия с комплексными числами

1. Сложение комплексных чисел. Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части.

   Пример №1. $z_1=1+3i;\ z_2=4-5i$

   $z_1+z_2=1+3i+4-5i=5-2i$

1. Вычитание комплексных чисел. Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака.

   Пример №2. $z_1-z_2=1+3i-(4-5i)=1+3i-4+5i=-3+8i$

1. Умножение комплексных чисел. При умножении комплексных чисел необходимо воспользоваться правилом умножения многочленов: чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и помнить, что $i^2=-1.$

   Пример №3.

   $z_1\cdot z_2=(1+3i)\cdot(4-5i)=1\cdot4+3i\cdot4+1\cdot(-5i)+3i\cdot(-5i)=4+12i-5i-15i^2=4+12i-5i-15\cdot(-1)=4+12$

1. Деление комплексных чисел. Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

   Пример №4. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3i}{4-5i}=\frac{(1+3i)\cdot(4+5i)}{(4-5i)\cdot(4+5i)}=\frac{4+12i+5i+15i^2}{4^2-(5i)^2}=\frac{4+17i-15}{16+25}=\frac{-11+17i}{41}=\frac{-11}{41}+\frac{17}{41}i.$

1. Модуль комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$

Практическая часть.

1)Доказать, что: а) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; б) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; в) $\overline{(z^n)}=\bar{z}^n,\ n\in\mathbb{N}$.

2)Выполнить указанные операции: а) $(2 - i)(2 + i)^2 - (3 - 2i) + 7$; б) $(1 + i)^4$; в) $(\sqrt{3}/2 + i/2)^6$.

3)Делится ли многочлен $x^4 + 2x^2 + 4(1 + i)$ на $x - 1 + i$?

4)Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\frac{(1/2)+i(\sqrt{3}/2)}{(1/2)-i(\sqrt{3}/2)}$.

5)Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_1$; в) $z_1 z_2$; г) z_1/z_2.

6)Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: а) -3; б) $-i$; в) $1 + i$; г) $-1+i\sqrt{3}$.

7)Установить, при каких действительных значениях x и y равны следующие комплексные числа: $z_1 = x^2 = xyi - 5 + i$ и $z_2 = xi - y^2 + yi$.

8)Найти координаты точки M, изображающей комплексное число $z = \frac{5i-2}{3i+1} + i + \frac{8i-3}{2-i}$.

9)Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

10)Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

11)Доказать, что $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$.

12)Найти число, сопряженное с числом $z = \frac{1}{4}\left(\frac{17+31i}{7+i} + \frac{12}{(1+i)^4}\right) + i$.

13)Установить, при каких действительных значениях x и y являются противоположными следующие комплексные числа: $z_1 = \frac{xyi + y^2 - 9x^2}{i}$ и $z_2 = \frac{29}{2+5i}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.
«История развития комбинаторики».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «История развития комбинаторики».
2. формирование основных понятий комбинаторики: размещения из m элементов по n, сочетания из m элементов по n, перестановки из n элементов;
3. формирование умений и навыков вычисления значений комбинаторных выражений по формулам, решения простейших комбинаторных задач.
4. Закрепить и систематизировать знания по теме.
5. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Практическая часть.

Разбор конкретных ситуаций

Задача 1. В некотором учреждении имеются две различные вакантные должности, на каждую из которых претендуют три сотрудника: A, B, C. Сколькими способами из этих трех кандидатов можно выбрать два лица на эти должности?

Задача 2. Для участия в соревнованиях требуется выбрать двоих спортсменов из трех кандидатов: A, B, C. Сколькими способами можно осуществить этот выбор?

Студентам предлагается два проблемных задания: 1) установить различие между этими двумя внешне схожими задачами и 2) предположить, в какой задаче результат будет больше, и почему. После этого предлагается решить эти задачи методом перебора всевозможных вариантов.

Решение задачи 1. AB, BA, BC, CB, AC, CA (всего шесть способов).

Решение задачи 2. AB, BC, AC (всего три способа).

Задача 1. Сколькими способами могут занять I, II, III места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

Ответ: 366.

Задача 2. Из 30 обучающихся группы надо выбрать старосту и помощника старосты. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 870.

Задача 3. Сколькими способами можно составить букет из трёх цветков, выбирая цветы из девяти имеющихся?

Ответ: 84.

Задача 4. В группе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

Ответ:21

Самостоятельная работа

Проверь себя

1.Определите вид соединений:

а) Соединения из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются __________*перестановки*

б) Соединения из *m* элементов по *n*, отличающихся друг от друга только составом элементов, называются ________________*сочетания*

в) Соединения из *m* элементов по *n*, отличающихся друг от друга составом элементом и порядком их расположения, называются _________ *размещения*

2.Восстановите соответствие типов соединений и формул для их подсчёта

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

А. 1)сочетания

$$P_n = n!$$

В. 2)размещения

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

С. 3)перестановки

3. Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать: а)двух дежурных; б)старосту и помощника старосты?

Ответ: а)276; б)552.

4. «Проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка задумали сыграть квартет». Сколькими способами они могут выбрать каждый для себя по одному инструменту из 10 данных различных инструментов?

Ответ: $A_{10}^4 = 5040$

Практическая работа № 8.

«Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона—Лейбница».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

4. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление определенного интеграла».
5. Закрепить и систематизировать знания по теме.
6. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

Теоретическая часть.

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x+4+x^2$:

$$F(x)=-4\cdot\frac{x^2}{2}+4\cdot x+\frac{x^3}{3}+C=-2x^2+4x+\frac{x^3}{3}+C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx=\left(-2x^2+4x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(-2\cdot 2^2+4\cdot 2+\frac{2^3}{3}\right)-\left(-2\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+\frac{(-2)^3}{3}\right)=$$

$$=\left(-8+8+\frac{8}{3}\right)-\left(-8-8-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной *a* верно равенство

$$\int_{-2a}^{a}2x^3dx=-7{,}5\,?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\frac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^{a} 2x^3 dx = \left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7{,}5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число –1.

О т в е т: -1.

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

3. Значение $\int_{-1}^{1} \left(-6x + x^2 + 9\right) dx$ равно:

   а) $18\frac{1}{3}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $19\frac{1}{3}$.

4. Равенство $\int_{a}^{2a} x^3 dx = 3{,}75$ (где $a > 0$) верно, если a равно:

   а) 1; б) 2; в) 3.

Практическая часть.
<u>Вариант 1.</u>

3. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \left(1 + cos\, 2x\right) dx$.

4. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \int\limits_0^2 (x^3-1)dx$.

Вариант 2.

3. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.

4. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$.

Вариант 3.

3. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$.

4. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 4.

3. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.

4. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx$.

Вариант 5.

4. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{-1}^{2} -x^3 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx$

5. Верно ли неравенство: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6.

2. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_0^2 (1+3x)^4 dx$.

6. Верно ли неравенство: $\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx < \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7.

3. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos xdx$; б) $\int_{2}^{7} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

4. Верно ли неравенство: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8.

3. Вычислите интегралы: а) $\int_{1}^{5} x^4 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$.

4. Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx > \int_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

Практическая работа №9.

«Классическое определение вероятности, свойства вероятностей».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Классическое определение вероятности, свойства вероятностей».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

Практическая часть.

1. Событие «Из 25 студентов группы двое справляют день рождения 30 февраля» является ____.

1. достоверное

2. невозможное

3. случайное

2. Назовите случайное событие _____.

1. слово начинается с буквы «ъ»

2. студенту второго курса 10 лет

3. бросили две игральные кости: сумма выпавших на них очков равна 8.

3. Достоверным является событие _____.

1. два попадания при трех выстрелах

2. наугад выбранное число, составленное из цифр 1,2,3 без повторений, меньше 400

3. подкинули монету, и она упала на «орла».

4. Среди пар событий, найдите несовместные _____.

1. В сыгранной Катей и Славой партии шахмат, Катя проиграла и Слава проиграл

2. Наступило лето; на небе ни облачка

3. При бросании кубика «выпало четное число», «выпало 2 очка».

5. Охарактеризуйте случайное событие: новая электролампа не загорится. Это событие __

1. менее вероятное

2. равновероятное

3. более вероятное.

6. В колоде карт лежат четыре туза и четыре короля разных мастей. Достают карту наугад. Противоположными являются события _____.

1. достанут трефового туза

2. достанут туза любой масти

3. достанут любую карту, кроме трефового туза.

7. При бросании кубика выпало не больше 5 очков. Количество благоприятных исходов равно _____.

1. 1

2. 5

3. 6

8. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Количество исходов двух совместных выстрелов равно _____.

1. 2

2. 3

3. 4

9. Найти вероятность того, что при двукратном бросании кубика произведение очков

а) кратно 5,

б) кратно 6.

10. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают 3 карты. Найти вероятность того, что

а) нет пиковой дамы,

б) есть пиковая дама.

11. Случайно выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что оно

а) оканчивается 0;
б) состоит из одинаковых цифр;
в) больше 27 и меньше 46;
г) не является квадратом числа.

12. В клетки таблицы 2х2 ставят крестики и нолики. Найдите вероятность того, что

а) будет поставлен ровно один крестик,
б) будут поставлены ровно 2 нолика,

в) в левой нижней клетке будет стоять крестик.

13. Эта задача – одна из первых по теории вероятностей – была предложена Галилею одним игроком в кости (Галилей дал правильное решение). Три кости подбрасываются одновременно. Что более вероятно – появление на трёх костях суммы 10 или 9?

Практическая работа №10.

«Теорема о сумме вероятностей. Прикладные задачи. Представление числовых данных».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Теорема о сумме вероятностей. Прикладные задачи. Представление числовых данных».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

Теоретическая часть.

Пример. В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

Решение. Обозначим события: *A* – вынули белый шар из первого ящика, $P(A)=\frac{1}{6}$;

$\overline{A}$ - вынули черный шар из первого ящика, $P(\overline{A})=\frac{5}{6}$;

B – белый шар из второго ящика, $P(B)=\frac{2}{3}$;

$\overline{B}$ - черный шар из второго ящика, $P(\overline{B})=\frac{1}{3}$.

Нам нужно, чтобы произошло одно из событий $A\overline{B}$ или $\overline{A}B$. По теореме об умножении вероятностей

$P(A\overline{B})=\frac{1}{18}$, $P(\overline{A}B)=\frac{10}{18}$.

Тогда искомая вероятность по теореме сложения будет

$$P=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{11}{18}.$$

Пример. Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго – 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найти вероятность: а) двойного попадания; б) двойного промаха, в) хотя бы одного попадания; г) одного попадания.

Решение.

Пусть A – попадание первого стрелка, $P(A)=0,8$;

B – попадание второго стрелка, $P(B)=0,9$.

Тогда $\overline{A}$ - промах первого, $P(\overline{A})=1-0,8=0,2$;

$\overline{B}$ - промах второго, $P(\overline{B})=1-0,9=0,1$.

Найдем нужные вероятности.

а) AB – двойное попадание, $P(AB)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,9=0,72$

б) $\overline{A}\,\overline{B}$ – двойной промах, $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0,2\cdot 0,1=0,02$.

в) $A+B$ – хотя бы одно попадание,

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,8+0,9-0,72=0,98$.

г) $A\overline{B}+\overline{A}B$ – одно попадание,

$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,9=0,26$.

Пример. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

Решение.

A – формула содержится в первом справочнике;

B – формула содержится во втором справочнике;

C – формула содержится в третьем справочнике.

Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей.

1. $P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=$
$=0,6\cdot 0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2+0,4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,188$

2. $P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3\cdot 0,8+0,4\cdot 0,7\cdot 0,8=0,452$.

3. $P(ABC)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,8=0,336$

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Вероятность ***появления хотя бы одного из событий*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то формула принимает простой вид:

$$P(A) = 1 - (1-p)^n = 1 - q^n.$$

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p1 = 0{,}8$; $p2 = 0{,}7$; $p3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2, \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}3, \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}1$$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994$.

Пример. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События "машина работает" и "машина не работает" (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p + q = 1$

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна $q = 1 - p = 0{,}1$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}1^4 = 0{,}9999$

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Пример. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Обозначим через А событие "при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз". События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т. д., независимы в совокупности, поэтому применима формула $P(A) = 1 - q^n$.

Приняв во внимание, что, по условию, $P(A) \geq 0{,}9$, $p = 0{,}4$ (следовательно, $q = 1 - p = 0{,}6$), получим

$1-0,6^n \geq 0,9,$

$0,6^n \leq 0,1.$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10:

$n\lg 0,6 \leq \lg 0,1,$

$n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} \approx 4,5.$

Итак, $n \geq 5$, т.е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Литература.

1. Омельченко В.П. Математика:учеб.пособие для студентов СПО/В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. – 5 –е.изд. – Ростов на Дону, 2011.

2. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. — М., 2016.

3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10-11. – М., 2012.

Интернет-ресурсы:

1. http://www.exponenta.ru/educat/links/l_educ.asp#0 – Полезные ссылки на **сайты математической и образовательной направленности:** Учебные материалы, тесты
2. http://www.fxyz.ru/ - Интерактивный справочник формул и сведения по алгебре, тригонометрии, геометрии.
3. http://maths.yfa1.ru - Справочник содержит материал по математике (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия).
4. allmatematika.ru - Основные формулы по алгебре и геометрии: тождественные преобразования, прогрессии, производная, стереометрия и проч.